EXERCÍCIOS CAPÍTULO 5

1. Um produtor de refrigerantes resolveu lançar uma campanha publicitária, oferecendo prémios impressos nas cápsulas das garrafas. Durante a campanha, 5% das garrafas distribuídas para venda tinham prémio. Ao adquirir 15 garrafas, calcule a probabilidade de
   a) existirem somente duas garrafas com prémio.
   b) receber pelo menos um prémio.

2. Da produção diária de uma máquina retiram-se, para efeitos de controlo, 10 peças. Da experiência passada sabe-se que 80% das peças podem considerar-se "boas". Calcule a probabilidade de, nas 10 peças, haver mais que 8 peças "boas".

3. Sabe-se, por experiência, que a probabilidade de uma máquina necessitar de ser afinada em cada período de trabalho de 30 minutos é de 0.05 (períodos independentes). Em cada período só pode haver, no máximo uma afinação. Determine:
   a) O número médio de afinações numa semana em que a máquina trabalha 20horas.
   b) A probabilidade de em 8 horas de trabalho se verificar pelo menos uma afinação, e a de se verificarem 2 a 5 afinações.

4. A produção de parafusos em certa unidade fabril é assegurada por duas máquinas (M_1 e M_2) de funcionamento independente. Da experiência passada pode concluir-se que a proporção de parafusos com defeito, em cada uma das máquinas, é de 5%. Atendendo à capacidade das máquinas, e para efeitos de controlo de qualidade, colhe-se diariamente uma amostra de quatro parafusos da máquina M_1 e uma de oito da máquina M_2.
   a) Calcule a probabilidade de se encontrarem dois parafusos com defeito no conjunto das duas amostras.
   b) Os parafusos são vendidos em embalagens de 20, garantindo o fabricante que 90% são de boa qualidade. Calcule a probabilidade de essa garantia ser violada, isto é, de haver mais que dois parafusos defeituosos numa embalagem.

5. Num teste de resposta múltipla cada pergunta tem cinco respostas possíveis, e apenas uma delas é correcta. Admita que o aluno responde sequencialmente e ao acaso às perguntas.
   a) Qual a probabilidade de a primeira pergunta certa ser a quarta?
   b) Em média, a quantas perguntas tem de responder para acertar uma?

6. Qual a probabilidade de, no lançamento de uma moeda, se obter a terceira face no sétimo lançamento?

7. Considere que a probabilidade de um aluno responder correctamente a uma pergunta é 0.3. Qual a probabilidade de a décima pergunta respondida ser a quinta resposta correcta?

8. Sabe-se que 1% dos parafusos de determinado fabricante são defeituosos. Os parafusos são vendidos em caixas de 12 unidades com a garantia de devolução do valor pago caso existam dois ou mais parafusos defeituosos.

a) Qual a probabilidade de ocorrer uma devolução?
b) Se se comprar dez caixas, qual a probabilidade de haver devoluções?

9. Uma loja de equipamentos electrónicos, de proveniência duvidosa, decide rejeitar um fornecimento de jogos electrónicos se numa amostra aleatória de vinte encontrar algum com defeito.
   a) Qual a probabilidade de aceitar o fornecimento se 10% dos jogos electrónicos tiverem defeito?
   b) Qual a probabilidade de aceitar o fornecimento se 5% dos jogos electrónicos tiverem defeito?
   c) Se se admitisse no máximo um jogo com defeito, qual seria a probabilidade de rejeitar o fornecimento, no caso da alínea a)?

10. Um jovem casal deseja ter exactamente duas filhas. Considere que a probabilidade de ser rapaz ou rapariga é igual, e que o casal terá filhos (rapazes ou raparigas) até realizar o desejo.
    a) Qual a função probabilidade do número de rapazes?
    b) Qual a probabilidade de ter quatro crianças?
    c) Qual a probabilidade de ter no máximo quatro crianças?

11. Um fornecedor de fechaduras para portas blindadas envia as peças em lotes de 100 fechaduras, para 50 fábricas de portas blindadas, independentes. Devido a falhas de produção resultou defeituosa uma série de fechaduras. Para evitar prejuízos decidiu incluir em cada um dos lotes 5 dessas fechaduras, na esperança de passarem despercebidas ao controlo de qualidade dos clientes, que consiste em escolher duas fechaduras ao acaso, em cada lote, devolvendo o mesmo se alguma tiver defeito.
    a) Calcule a probabilidade de um lote ser aceite pela fábrica que o recebeu.
    b) Qual a probabilidade de que no controlo de qualidade de um lote haja pelo menos uma fechadura sem defeito?
    c) Se os 50 clientes receberem um lote nas condições do enunciado, qual a probabilidade de que pelo menos 2 deles devolvam o lote?

12. Considere-se a variável aleatória X que representa o número de cartas de copas em quatro cartas retiradas aleatoriamente, sem reposição, de um baralho vulgar de 52 cartas.
    a) Encontre a função probabilidade da variável aleatória X.
    b) Calcule a média e a variância de X.
    c) Qual a probabilidade de serem todas de copas?
    d) Sabendo que saiu pelo menos uma carta de copas, nas quatro escolhidas ao acaso, qual a probabilidade de serem exactamente duas cartas de copas?

13. Num lote de 500 peças existem 50 defeituosas. Para efeitos de aceitação do lote retira-se ao acaso uma amostra, rejeitando-se o lote se nessa amostra existirem mais que duas peças defeituosas.
    a) Se a amostra for de dimensão 10, qual a probabilidade de se rejeitar o lote?

b) Supondo que se mantém o critério de rejeição de um lote se numa amostra existirem mais que duas peças defeituosas, determine a dimensão máxima da amostra de forma que a probabilidade de rejeição do lote seja inferior a 0.05.

14. Seja X uma variável aleatória com distribuição de Poisson de parâmetro $\lambda = 5$. Calcule as seguintes probabilidades:
  a) $P(X = 5)$.
  b) $P(X \geq 1)$.
  c) $P(4 < X < 8)$.

15. Na linha de atendimento a clientes de um centro comercial o número de chamadas de reclamações segue um processo de Poisson com taxa de 4 por dia.
  a) Calcule a percentagem de dias em que não há reclamações.
  b) Qual a probabilidade de num dia se receber de três a seis queixas?
  c) Qual a probabilidade de numa semana (2.ª a 6.ª feira) se receberem exactamente 15 reclamações?
  d) Qual a probabilidade de se receber pelo menos uma reclamação em todos os dias de uma semana?

16. O número de utentes que chegam a uma Conservatória do Registo Civil para requerer o Cartão de Cidadão, em dia útil, segue um processo de Poisson com intensidade média de 10 por hora. O horário de funcionamento desse serviço é das 9h às 16h.
  a) Qual a probabilidade de decorrerem pelo menos 15 minutos, dentro do horário de funcionamento, sem chegar qualquer utente?
  b) Calcule a probabilidade de chegarem pelo menos 20 pessoas na hora de almoço (das 12h30m às 14h).

17. Uma fábrica produz azulejos que são embalados em caixas de 20 unidades. Sabe-se que o número de defeitos por azulejo tem distribuição de Poisson com média igual a 0.1. Naturalmente que há independência entre o número de defeitos existentes em diferentes azulejos.
  a) Qual a percentagem de azulejos com defeitos?
  b) Calcule a probabilidade de numa caixa existirem mais de dois azulejos com defeitos.
  c) Se a aceitação de um fornecimento de azulejos for feita na condição de o número total de defeitos encontrados numa amostra de 100 azulejos não exceder 15, qual a probabilidade de rejeitar um fornecimento?

18. Seja X uma variável aleatória com distribuição de Poisson de parâmetro λ.
  a) Fixado k, qual o valor de λ que maximiza $P(X = k)$, $k = 1, 2, \ldots$.
  b) Sendo λ inteiro, mostre que $P(X = \lambda - 1) = P(X = \lambda)$.
  c) Qual o valor de k que maximiza $P(X = k)$?
  Sugestão: utilize o quociente $P(X = k) / P(X = k - 1)$.

19. Classifique as afirmações abaixo, verdadeiras ou falsas, justificando sucintamente:

a) Seja $X \sim \mathrm{B}(n,1/2)$ e $Y = n - X$. As variáveis aleatórias X e Y são identicamente distribuídas.
b) Se $X_1 \sim B(n,\theta_1)$ e $X_2 \sim B(n,\theta_2)$ são variáveis aleatórias independentes, então $X_1 + X_2 \sim B(n,\theta_1 + \theta_2)$.
c) Seja X uma variável aleatória com distribuição de Poisson de parâmetro $\lambda = 3.2$, então $P(X = 3.2) > 0$.
d) Se $X \sim B(10{,}0.5)$ então a distribuição de X pode ser bem aproximada por uma distribuição Po(5).

20. O número de erros de ortografia que um aluno dá por página, numa prova escrita de Estatística, segue um processo de Poisson com taxa média de 1.5 erros.
a) Qual a percentagem de provas de duas páginas sem erros de ortografia?
b) Se um aluno escreveu quatro páginas, qual a probabilidade de ter cometido mais de 8 erros?
c) Escolhidas ao acaso cinco provas de quatro páginas cada, qual a probabilidade de apenas uma delas não ter erros de ortografia?
d) Numa prova com seis páginas contaram-se dez erros, qual a probabilidade de metade deles estarem nas duas primeiras páginas?

21. O número de alunos que entram ou saem de uma aula de 90 minutos após os primeiros 10 minutos segue um processo de Poisson com taxa média de 1 por cada dez minutos. A perturbação causada é evidente, e considera-se intolerável se exceder os 10 movimentos por aula (80 minutos úteis).
a) Qual a probabilidade de não haver qualquer movimento (entrada ou saída) na última meia hora da aula?
b) Se a situação “normal” fosse um máximo de três entradas ou saídas por aula, qual a percentagem de aulas nessas condições?
c) Numa cadeira semestral dificilmente se cumpre o programa se o número de aulas consideradas intoleráveis for superior a um quarto das programadas. Se estiverem previstas 20 aulas, calcule a probabilidade de se cumprir o programa.

22. O número de pessoas que acorrem a certo serviço de atendimento ao público segue um processo de Poisson com taxa média de 15 por dia. O serviço funciona das 10 às 16 horas, e atende no máximo 25 pessoas por dia.
a) Qual a probabilidade de entre as 10 e as 12 horas chegarem menos que cinco pessoas?
b) Qual a probabilidade de num dia a primeira pessoa chegar depois das 12 horas?
c) Qual a proporção de dias em que ficam pessoas por atender?

23. O número de ovos postos por segundo em certo aviário segue um processo de Poisson com taxa média de 1 por segundo.
a) Determine a probabilidade de o número de ovos postos por segundo ser superior ao dobro da variância.
b) Qual a probabilidade de em 5 segundos serem postos menos que três ovos?
c) Se num período de 10 segundos forem postos 12 ovos, qual a probabilidade de nos primeiros 8 segundos terem sido postos 10 ovos?

24. Admita que a ocorrência de faltas cometidas pela equipa A num jogo de futebol segue um processo de Poisson, com uma taxa média de 18 por jogo. Admita que um jogo tem 90 minutos divididos em duas partes de 45 minutos cada, não se considerando, neste exercício, os descontos praticados pelo árbitro no final de cada parte.
    a) Qual a probabilidade da equipa A cometer menos de 6 faltas no primeiro quarto de hora?
    b) Sabendo que a equipa A cometeu 4 faltas no primeiro quarto de hora, qual a probabilidade de cometer menos de 10 na primeira parte?
    c) Num ano em que a equipa A vai realizar 20 jogos, qual a probabilidade de que o limite de 21 faltas por jogo só seja excedido em, no máximo, 4 jogos?

25. Um circuito integrado de computador tem 1000 transístores. A probabilidade de um transístor ter defeito é de 0.0012.
    a) Qual a probabilidade de um circuito integrado ter no máximo 2 transístores com defeito?
    b) Em 20 circuitos integrados, escolhidos ao acaso, qual a probabilidade de metade deles não terem defeitos?

26. Os 60 alunos de uma turma dirigem-se à secretaria entre as 15 e as 16 horas, de determinado dia, para se inscreverem para um exame. Admita que chegam de forma aleatória e independentemente uns dos outros. Qual a probabilidade de chegar mais de um aluno no primeiro minuto?

27. Estatísticas médicas revelam que determinada doença, cujo tratamento é extremamente dispendioso, afecta uma em cada cinco mil pessoas. Uma seguradora, depois de estudar o assunto, decidiu criar um seguro para cobertura das despesas de tratamento. Num determinado ano, a companhia de seguros tem em carteira 3000 apólices desse tipo.
    a) Determine a probabilidade de nenhuma das pessoas seguradas contrair a doença nesse ano.
    b) Sabendo que no ano em causa já foi efectuada uma participação à seguradora, calcule a probabilidade de não se verificarem mais que três participações até final do ano.

28. Num terreno quadrado com 10 metros de lado, dividido em 100 quadrados iguais (numerados de 1 a 100), lançam-se aleatoriamente e de forma independente 400 sementes. Supõe-se que a probabilidade de uma semente cair num determinado quadrado é 0.01.
    a) Qual a probabilidade do primeiro quadrado ficar sem sementes?
    b) Qual a probabilidade de caírem no mínimo 6 sementes no quadrado número 50?

29. O número de vezes em que uma aula (duas horas) é subitamente assaltada pelo toque irritante e tenebroso de um telemóvel segue um processo de Poisson com taxa média de 1 por aula.
    a) Qual a proporção de aulas sem os tais sons “melodiosos”? E se a duração da aula for uma hora?

b) Acabou de tocar pela segunda vez, na mesma aula, um telemóvel. O professor afirma que abandonará a sala se se voltar a ouvir tal coisa. Qual a probabilidade de a aula ser interrompida por essa razão?
c) Nas aulas do semestre (em número de 20), qual a probabilidade de haver duas aulas com mais que duas chamadas?

30. A composição de uma certa revista é feita por duas empresas da especialidade, verificando-se que numa delas o número médio de gralhas por página é de 0.2, enquanto na outra é de 0.3. Admita que o número de gralhas tem distribuição de Poisson e que a primeira empresa é responsável por 60% da composição da revista.
a) Qual a percentagem de páginas da revista sem gralhas?
b) Perante uma página sem gralhas, qual a probabilidade de ter sido composta pela empresa que menor número de páginas compõe?
c) Se a revista tiver 20 páginas, qual a probabilidade de nenhuma ter gralhas?

31. Selecciona-se ao acaso um carta de um baralho vulgar de 52 cartas. Regista-se a carta seleccionada e coloca-se novamente a carta no baralho. Repete-se este procedimento 5 vezes seguidas. Calcule a probabilidade de obter exactamente duas cartas de espadas e uma de copas.

32. Seja *X* uma variável aleatória com função densidade
$$f_X(x) = 1/5 \quad (0 < x < 5).$$
a) Identifique, justificando, a respectiva distribuição teórica. Indique os momentos mais importantes.
b) Considerando duas observações independentes desta variável, mostre, recorrendo às funções geradoras dos momentos, que a distribuição da soma $X_1 + X_2$ não é da família das distribuições das parcelas.
c) Sendo $Y = 1/X$, calcule a sua média, se existir.

33. Seja *X* variável aleatória contínua com distribuição uniforme no intervalo $(-\theta, \theta)$, onde $\theta > 0$. Determine o valor de θ sabendo que $P(X > 4) = 0.25$.

34. A duração de pequenos anúncios (entre 5 e 12 segundos) numa cadeia de televisão pode considerar-se uma variável aleatória com distribuição uniforme.
a) Indique a função de distribuição.
b) Qual a probabilidade de um pequeno anúncio ter duração superior a 7 segundos.
c) Calcule e interprete: $P(X > 6 \mid X \le 10)$.
d) Calcule a média e o desvio padrão da duração dos pequenos anúncios.

35. Mostre que: se $X \sim U(0,1)$, então $Y = a + (b-a)X \sim U(a,b)$, com $a < b$.

36. Seja *X* uma variável aleatória contínua com função densidade
$$f_X(x) = x/2 \quad (0 < x < 2).$$
Mostre que $Y = F_X(X)$ tem distribuição uniforme, onde F_X é a função de distribuição de *X*.

37. Classifique as afirmações abaixo de verdadeiras ou falsas, justificando sucintamente:
    a) Se $X \sim B(n;0{,}5)$, então a distribuição de X é simétrica, qualquer que seja n.
    b) Se $X \sim \mathrm{Po}(\lambda)$ então $Y = 4X \sim \mathrm{Po}(4\lambda)$.
    c) Seja X uma variável aleatória contínua com mediana igual a 15. Considera-se sucesso o acontecimento $A = [X > 15]$. Então em 20 observações independentes dessa variável aleatória o número de sucessos tem valor esperado 10 e variância 5.
    d) O valor esperado de uma variável aleatória com distribuição uniforme contínua é igual à mediana.
    e) Se X tem distribuição uniforme no intervalo $(a - 1/2, a)$, então a probabilidade de qualquer subintervalo nele contido é igual ao dobro da sua amplitude.

38. Seja Z uma variável aleatória com distribuição normal estandardizada. Calcule, recorrendo à representação gráfica sempre que apropriado:
    a) $P(0 < Z \le 2.05)$.
    b) $P(-1.22 \le Z < 1.05)$.
    c) $P(Z \ge -2.05)$.
    d) O valor de k tal que $P(|Z| > k) = 0.05$.
    e) O valor de k tal que $P(|Z| < k) = 0.90$.

39. Se X tem distribuição normal com média 6 e variância 25, calcule:
    a) $P(6 < X \le 12)$.
    b) $P(0 \le X < 8)$.
    c) $P(X < -4)$.
    d) $P(|X - 6| > 10)$.
    e) O valor de k tal que $P(X > k) = 0.90$.

40. Qual a distribuição da variável aleatória X cuja função geradora de momentos é $M_X(s) = e^{2s+s^2}$?

41. O montante de depósitos à ordem efectuados diariamente, em certa agência bancária, é aleatório com distribuição normal de média 120 unidades monetárias e variância 64.
    a) Determine a percentagem de dias em que o montante de depósitos à ordem se situa entre 105 e 135 unidades monetárias.
    b) Determine a probabilidade de o montante de depósitos ser superior à média, nos dias em que esse montante é inferior a 125 unidades monetárias.
    c) Determine a média e a variância do montante de depósitos à ordem efectuados semanalmente (5 dias).
    d) Determine o limite inferior do montante de depósitos que se verifica em 90% dos dias.

42. Uma máquina de enchimento de garrafas de refrigerante despeja em cada garrafa uma quantidade de líquido que pode ser considerada como uma variável aleatória com distribuição normal de média 330 ml e desvio padrão 4 ml.

a) Uma garrafa é rejeitada, no controle de qualidade que se segue à fase de enchimento, se o volume de líquido despejado diferir da média, em valor absoluto, por mais de 6 ml. Qual a percentagem de garrafas rejeitadas nesse controle?
b) Perto do final de um dia de laboração, o responsável pela zona de enchimento verifica que tem 100 garrafas para encher e um recipiente contendo 33100 ml de refrigerante para engarrafar. Qual a probabilidade de as garrafas disponíveis não serem suficientes para engarrafar todo o refrigerante do recipiente?

43. Considere que o tempo gasto numa visita à feira do livro é uma variável aleatória com distribuição normal, de média igual a duas horas. Suponha que apenas 2.5% dos visitantes permanecem mais de três horas.
a) Qual o desvio padrão da variável?
b) Sabendo que um visitante já chegou há uma hora, qual a probabilidade de se ir embora nos próximos 30 minutos?
c) Calcule a mediana e o intervalo interquartil de X , e interprete o seu significado.
d) Calcule a probabilidade de em 20 visitantes seleccionados ao acaso haver no máximo um que permaneça mais de três horas.

44. Para efeitos de comercialização, determinados frutos são classificados pelo tamanho, tomando como medida o seu diâmetro máximo, que é uma variável aleatória com distribuição normal, de desvio padrão igual a 5 e média μ. As categorias são as seguintes:
C1 – Frutos com diâmetro máximo inferior ou igual a 6;
C2 – Frutos com diâmetro máximo entre 6 e 12;
C3 – Frutos com diâmetro máximo superior ou igual a 12.
a) Sabendo que 30% dos frutos são da categoria C3, calcule o diâmetro máximo médio dos frutos e a percentagem de frutos em cada uma das outras categorias.
b) Se os frutos forem vendidos em embalagens de 6 unidades, incluindo aleatoriamente todos os tamanhos, qual a probabilidade de haver pelo menos dois frutos da categoria C3?

45. O tempo médio gasto na estafeta 4×100 metros por cada um dos atletas da equipa A é de, respectivamente, 10.6, 10.8, 10.5 e 10.7 segundos. Admita que os tempos gastos têm distribuição normal com desvio padrão de, respectivamente, 0.2, 0.5, 0.4 e 0.6 segundos.
a) Estabeleça um limite máximo para o tempo gasto pela equipa em pelo menos 90% dos casos.
b) Se o tempo gasto pela equipa B tiver distribuição normal com média 42.8 e variância 0.8, qual a probabilidade de esta vencer a equipa A?
c) Critique a utilização da distribuição normal num contexto deste tipo.

46. Os eixos produzidos por uma máquina consideram-se não defeituosos se o desvio do diâmetro do eixo para as dimensões projectadas não é maior, em valor absoluto, do que dois milímetros. Os desvios aleatórios do diâmetro dos eixos obedecem a uma

distribuição normal de média nula e desvio padrão 1.6 mm. Determine a percentagem de eixos não defeituosos produzidos.

47. Num estabelecimento que vende materiais de construção, sabe-se que as vendas diárias de areia (em centenas de quilogramas) têm um comportamento aleatório, traduzido por uma distribuição normal, com média 20 e desvio padrão 2.
    a) Sabendo que numa manhã o estabelecimento já vendeu uma tonelada de areia, qual a probabilidade de, nesse dia, vir a vender mais que 2.5 toneladas?
    b) Qual a probabilidade de, em determinado mês (20 dias úteis), as vendas de areia ultrapassarem 37 toneladas?

48. Seja X uma variável aleatória com distribuição normal de média 100 e variância 225, que representa o resultado obtido por uma pessoa num teste psicotécnico.
    a) Qual a percentagem de pessoas com resultado entre 80 e 115?
    b) Sabendo que o resultado foi superior à mediana, qual a probabilidade de ser inferior a 115?
    c) Seleccionadas 20 pessoas ao acaso, qual a probabilidade de que pelo menos metade tenha nota superior ao 3.º quartil?
    d) Calcule $P\{(X-100)^2 \leq 144\}$.

49. Seja X uma variável aleatória com distribuição exponencial de média 20. Calcule:
    a) $P(10 < X \leq 30)$.
    b) $P(X > 30)$.
    c) $P(X > 40 \mid X > 10)$.

50. Um banco atende em média dois clientes em cada 3 minutos. Considere que o número de clientes atendidos é um processo de Poisson.
    a) Qual a probabilidade de decorrerem 3 minutos sem qualquer cliente atendido?
    b) Qual a probabilidade de o atendimento de um cliente demorar mais do que 3 minutos?
    c) Compare os resultados das duas alíneas anteriores.
    d) Qual a probabilidade de o atendimento de um cliente demorar entre 3 e 6 minutos?

51. Em determinado aeroporto, os aviões aterram a uma taxa de dois por hora, seguindo um processo de Poisson.
    a) Qual a probabilidade de o tempo decorrido entre duas chegadas consecutivas ser inferior a 15 minutos?
    b) Qual a probabilidade de decorrer mais que meia hora até à próxima chegada?

52. Adquiriu-se uma caixa com 12 lâmpadas onde constava a indicação de que a duração média de vida de uma lâmpada era de 1000 horas. Admitindo que o tempo de vida de uma lâmpada tem distribuição exponencial, determine a probabilidade da lâmpada com menor duração, entre as 12 da caixa, durar menos de 50 horas.

53. Numa unidade industrial, o tempo de execução de uma peça é uma variável aleatória com distribuição exponencial, de média 5 minutos.

a) Sabe-se que uma peça já está em execução há 2 minutos. Determine a probabilidade de serem ainda necessários pelo menos 4 minutos até à sua conclusão. Comente.
b) Tomadas 5 peças ao acaso, calcule a probabilidade de duas delas terem tido um tempo de execução máximo de 4 minutos.
c) Admitindo que não há peças em *stock*, acha razoável que, em dado momento, a empresa se tenha comprometido a fornecer 50 peças dentro de 4 horas? Justifique.

54. Ana, Maria, Beatriz e Catarina chegam sempre atrasadas aos seus encontros. Suponha que os tempos de atraso de cada uma delas são independentes e têm distribuição exponencial de média 20 minutos. Por outro lado o João tem uma "pontualidade britânica", isto é, nunca se atrasa.
    a) O João convidou a Ana para almoçar mas, já desesperado por tantas horas de espera, decidiu que desta vez não esperaria mais do que 30 minutos. Qual a probabilidade de almoçarem juntos neste dia?
    b) Se o João combinar um jantar com as 4 amigas qual a probabilidade de ter de esperar sozinho (até que a primeira apareça) mais de 10 minutos? E qual a probabilidade do tempo total de espera do João (até que a última chegue) ser superior a 1 hora?

55. O número de partículas radioactivas observadas num intervalo de 10 minutos segue um processo de Poisson.
    a) Supondo que a probabilidade de não se observar qualquer partícula no intervalo de 10 minutos é de 0.15, determine o ritmo do processo, isto é, em média quanto tempo medeia entre duas observações consecutivas.
    b) Qual a probabilidade de ser necessário esperar mais que 30 minutos até se observar a 3.ª partícula?

56. O tempo decorrido desde a avaria até à reparação (designado por tempo de reparação) de um certo tipo de máquina, é uma variável aleatória com distribuição exponencial de média 2 horas.
    a) Qual a probabilidade de uma máquina que se avariou ter um tempo de reparação superior a uma hora?
    b) Seleccionadas aleatoriamente dez máquinas que se avariaram, qual a probabilidade da reparação mais rápida se realizar em menos de 15 minutos?
    c) Qual a probabilidade do tempo total de reparação de 50 máquinas avariadas não exceder 90 horas?

57. Utilizando a função geradora dos momentos, mostre que

$$\text{se } X \sim G(\alpha,\lambda) \text{ e } Y = \frac{X}{c}, \text{ com } c > 0, \text{ então } Y \sim G(\alpha, c\lambda).$$

58. Se $X \sim \chi^2(23)$, obtenha:
    a) $P(14.85 < X < 32.01)$.
    b) Os valores de a e b tais que $P(a < X < b) = 0.95$ e $P(X < a) = 0.025$.

c) A média e a variância de X.
d) $\chi^2_{23,0.05}$ e $\chi^2_{23,0.95}$.

59. Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes. Se X for uma variável aleatória exponencial de parâmetro $\lambda = 4$ e Y seguir uma distribuição do qui-quadrado com 5 graus de liberdade. Calcule o valor esperado e o desvio padrão da variável aleatória $V = 6X - Y + 2$.

60. Sendo $X \sim \mathrm{G}(5;2)$, calcule, utilizando a distribuição do qui-quadrado, o seguinte:
a) Probabilidade de X ser maior do que a respectiva média.
b) O valor de k tal que $P(X > k) = 0.05$.

61. Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes tais que $X \sim \mathrm{Ex}(4)$ e $Y \sim \chi^2(5)$. Considere-se a variável aleatória $Z = 8X + Y$.
a) Calcule o valor esperado e o desvio padrão de Z.
b) Determine o valor de k tal que $P(Z < k) = 0.75$.

62. Um fornecedor de equipamentos de precisão comprometeu-se a fornecer 5 barras de comprimento igual a 210 mm, sujeitando-se a uma multa M por desvios em relação às especificações. Essa multa é calculada segundo a fórmula $M = 50(X - 210)^2$ (em milhares de euros), onde X é o comprimento de cada peça, em milímetros. O processo de fabrico utilizado garante peças cujo comprimento tem distribuição normal de média 210 e desvio padrão 0.15.
a) Determine o valor esperado e a variância da multa total.
b) Qual a probabilidade de o fornecedor se sujeitar, em relação às 5 peças, a uma multa superior a € 12 500?

63. A duração de um bloco publicitário, em minutos, num canal privado de televisão, é uma variável aleatória com distribuição gama de média 10 minutos e variância igual a 40. Admite-se que as durações dos blocos publicitários são independentes umas das outras.
a) Qual a probabilidade de um bloco publicitário durar mais de 10 minutos?
b) Num programa com 3 blocos publicitários, qual a probabilidade do total da publicidade durar mais de 50 minutos.
c) Em 6 blocos publicitários, escolhidos ao acaso, qual a probabilidade de apenas um deles ter duração superior a 10 minutos?

64. O tempo de atendimento, em minutos, de uma pessoa num balcão de um serviço público é uma variável aleatória com distribuição exponencial de parâmetro λ = 0.25. Num determinado momento estão 20 pessoas à espera de serem atendidas. Defina a variável Y como o "tempo total de atendimento dos vinte utentes" e, admita que os tempos de atendimento de diferentes pessoas são independentes.
a) O chefe desse serviço afirma que mais de 90% das pessoas são atendidas em menos de 10 minutos. Avalie se essa afirmação é razoável.
b) Calcule a mediana e o intervalo interquartil do tempo de atendimento de uma pessoa.
c) Calcule o valor esperado e a variância de Y.

d) Qual a probabilidade do tempo total de atendimento das vinte pessoas ser inferior a 90 minutos?
e) Calcule a probabilidade do tempo de atendimento de cada uma das vinte pessoas ser superior a 3 minutos.

65. Utilizando a função geradora dos momentos, mostre que o quadrado de uma normal estandardizada tem distribuição do qui-quadrado com um grau de liberdade.

66. Suponha que a proporção de "não respostas" num inquérito de opinião pode ser bem modelado por uma variável aleatória X com função densidade $f_X(x) = 12x(1-x)^2$, para $0 < x < 1$.
a) Identifique a distribuição, e obtenha o valor esperado e a variância.
b) Calcule $P(X < 0.2)$ e $P(X < 0.2 \mid X < 0.5)$.
c) Identifique a distribuição de $Y = 1 - X$ e interprete o significado desta variável aleatória.
d) Calcule $E(1/X)$.

67. Seja X o montante de uma indemnização em proporção do capital seguro, referente a um determinado risco. Da experiência passada, sabe-se que, $f(x) = 20x^3(1-x)$, para $0 < x < 1$.
a) Qual a probabilidade de uma indemnização ser inferior a 10% do capital seguro? E de ser superior a 50% do capital, sabendo-se que foi superior a 10%?
b) Determine o valor esperado e o desvio padrão do montante de uma indemnização, expresso em proporção do capital seguro.
c) Suponha que a seguradora introduz uma franquia dedutível de 10%, isto é, a seguradora passa a pagar, por participação, uma proporção Y do capital seguro, sendo Y definido da seguinte forma:
$$Y = \psi(X) = \begin{cases} 0 & (X < 0.1) \\ X - 0.1 & (X \geq 0.1). \end{cases}$$
Qual o valor esperado de Y?

68. Suponha que os elos de uma corrente de bicicleta têm comprimentos aleatórios de média 0.5 cm e de desvio padrão 0.04 cm. As normas de um fabricante de bicicletas exigem que o comprimento de uma corrente esteja compreendido entre 49 cm e 50 cm.
a) Se uma corrente tiver 100 elos, determine a proporção de correntes que satisfazem as normas exigidas.
b) Utilizando apenas 99 elos, qual deve ser o desvio padrão da população de forma que 90% das correntes cumpram as normas do fabricante?

69. Na caixa de uma mercearia as contas que os clientes têm a pagar são sempre arredondadas para o múltiplo de 5 cêntimos mais próximo. Assim, para cada conta, a diferença entre o recebido e o registado pode considerar-se uma variável aleatória com função probabilidade
$$f_X(x) = \frac{1}{5} \quad (x = -2, -1, 0, 1, 2).$$

Num dia em que são atendidos 100 clientes, qual a probabilidade de que a diferença entre o total recebido e o registado exceda os 40 cêntimos?

70. Uma fábrica está equipada com seis máquinas, de características idênticas e de funcionamento independente, para a produção de certo tipo de peças. Admita que o custo de manutenção semanal (em euros) de cada máquina é uma variável aleatória uniforme no intervalo (0, 50). Na elaboração do orçamento anual (52 semanas) foi considerada uma verba de 8000 euros para a manutenção das seis máquinas, que funcionam de forma independente. Diga, justificando, se acha adequada a dotação orçamental feita.

71. Numa fábrica produz-se o artigo A à razão de 100 unidades por dia. A quantidade de matéria-prima B, incorporada em cada artigo é uma variável aleatória de média 75 g e variância 225.
   a) Determine a percentagem de dias em que o consumo de matéria-prima não excede 7.6 kg.
   b) Os artigos são vendidos em lotes de 200. Supondo que o custo da matéria-prima é de 0.25 euros/grama, qual deve ser o valor a considerar na formação do preço de venda do lote, de modo a cobrir o custo da matéria-prima, em 95% das situações?

72. Numa praça de Lisboa estão habitualmente estacionados automóveis em transgressão. A polícia autua, todos os dias, 90% dos carros estacionados em transgressão, deixando a notificação no pára-brisas. O número de pessoas que se apresentam na esquadra para pagar a multa, por dia, é uma variável aleatória com média e variância iguais a 10. Se cada multa for de 20 euros e a esquadra estiver aberta 225 dias por ano, qual a probabilidade de o montante total de multas cobrado anualmente na esquadra ultrapassar os 47 000 euros?

73. Uma fábrica em início de actividade sabe que minimiza os seus custos unitários se conseguir uma produção diária de, pelo menos, 300 unidades. Admita ser de 0.3 a probabilidade de não atingir este nível de produção.
   a) Em 100 dias de laboração, qual a probabilidade de não atingir tal nível em mais que 20 e no máximo de 40 dias?
   b) Sendo $n = 20$, e Y, a variável aleatória que representa o número de dias em que a produção é inferior a 300 unidades, compare as probabilidades exacta e aproximada do acontecimento dado pela condição $12 \le Y \le 16$.

74. Sendo $X \sim B(100;0.1)$, calcule $P(12 \le X \le 14)$ usando:
   a) A aproximação pela distribuição normal.
   b) A aproximação pela distribuição de Poisson.
   c) A distribuição binomial.

75. Em determinada fábrica de luvas, verifica-se que 1% das luvas apresentam defeitos, pelo que o número de luvas com defeito em cada par tem distribuição binomial, $X \sim B(2;0.01)$. Calcule a probabilidade de haver mais que 30 pares defeituosos,

num dia em que a fabricação foi de 1000 pares, utilizando os métodos conhecidos. Comente os resultados.

76. Sabe-se que se $X \sim \text{Po}(\lambda)$ a sua função geradora dos momentos vem dada por $M(s) = \exp\{\lambda(e^s - 1)\}$.
    a) Mostre que $\mu_3 = \lambda$ e $\mu_4 = \lambda + 3\lambda^2$.
    b) Calcule o coeficiente de assimetria (γ_1), o coeficiente de *Kurtosis* (β_2) e classifique a distribuição. Determine os valores daqueles coeficientes para $\lambda = 4$, 100 e 10 000.
    c) Determine o limite de γ_1 e de β_2 quando λ tende para $+\infty$, e comente o resultado tendo em conta o teorema do limite central.

77. O número de acessos a um certo *site* da Internet segue um processo de Poisson com taxa média de 30 por dia.
    a) Calcule $P(X > 40)$ comparando o valor obtido recorrendo à função probabilidade (e a meios de cálculo automático) com a aproximação dada pelo teorema do limite central. Comente.
    b) Qual a probabilidade de o número de acessos de uma semana (7 dias) se situar entre 200 e 220?
    c) Determine a probabilidade de, num mês (30 dias), se observarem, no máximo, 5 dias com mais de 40 acessos.

78. O número de pessoas que se dirige a uma dependência bancária para adquirir uma determinada colecção de arte, durante o semestre seguinte ao seu lançamento, segue um processo de Poisson com um ritmo médio de 10 por mês.
    a) Determine o número mínimo de colecções a ter em *stock* para ser de pelo menos 0.9 a probabilidade de satisfazer a procura nesse semestre.
    b) Sabendo que cada colecção é vendida a 3200 euros, qual a probabilidade de no primeiro trimestre a receita da venda deste produto exceder os 140 mil euros?

79. O número de bilhetes de parquímetro emitido em certa rua da cidade de Lisboa segue um processo de Poisson com taxa média de 50 por dia útil.
    a) Obtenha a probabilidade aproximada de esse número se situar entre 35 e 70, incluindo as extremidades, num determinado dia útil.
    b) Para os cinco dias úteis da semana, qual a probabilidade de se situar entre 225 e 275?

80. O número de cargueiros que chega a um porto para descarga segue um processo de Poisson, com um ritmo médio de 2 por dia.
    a) Considerando que as condições de operação desse porto só permite descarregar no máximo 4 cargueiros por dia, calcule a probabilidade de ficarem cargueiros por descarregar num dia em que não ficou serviço atrasado da véspera.
    b) Qual a probabilidade de num mês (30 dias) chegarem pelo menos 70 cargueiros para descarregar nesse porto?
    c) Qual é, aproximadamente, a probabilidade de num ano (365 dias) haver mais de 10 dias em que cheguem a esse porto mais de 5 cargueiros por dia.

81. Os passageiros do "Expresso" que parte ao meio-dia para Coimbra começam a entrar no veículo a partir das 11:40. O número de passageiros que entram para o veículo nos primeiros 15 minutos segue um processo de Poisson com ritmo médio de 2 passageiros por minuto. Nos últimos 5 minutos, ou seja entre as 11:55 e 12:00, o número passageiros que pretende entrar também segue um processo de Poisson mas com ritmo médio de 5 passageiros por minuto. Se o veículo que vai efectuar essa viagem tiver uma lotação máxima de 60 lugares, calcule a probabilidade de ser suficiente para satisfazer a procura.

82. A um concurso para emprego na área das telecomunicações apresentaram-se 1000 candidatos que, numa primeira fase, serão submetidos a uma prova escrita. A pontuação mínima exigida aos candidatos para poder passar à segunda fase é de 65. Admita que a pontuação obtida na prova escrita segue uma distribuição normal de média 55 e desvio padrão 10.
    a) Qual a percentagem de candidatos que passam à segunda fase?
    b) Se se pretender que a percentagem de candidatos a passar à segunda fase seja de 25% qual deverá ser a pontuação mínima exigida aos candidatos.
    c) Calcule a probabilidade de que pelo menos 180 candidatos consigam passar à segunda fase desse concurso.

83. Um programa de computador é executado, independentemente, pelo servidor S1 ou S2. O tempo (em minutos) de processamento do programa, no servidor S1 segue uma distribuição normal de média 3 minutos e variância 1 e no servidor S2 segue uma distribuição gama (14, 3).
    a) Calcule, para cada um dos servidores, a probabilidade do tempo de execução do programa exceder 4 minutos.
    b) Admitindo que 20% dos programas são executados no primeiro servidor e os restantes 80% no servidor 2, qual a proporção de execuções que excedem 4 minutos.
    c) Acha razoável que em 100 execuções do programa no servidor S1 menos de 6 tenham um tempo de execução superior a 4 minutos?

84. O número de pedidos de ajuda recebidos diariamente por um serviço telefónico de aconselhamento médico é uma variável aleatória discreta com média 32 e desvio padrão 8. Qual é aproximadamente a probabilidade de num trimestre (90 dias) o total de pedidos de ajuda recebidos por esse serviço ser superior a 3000?

85. A produção diária, em toneladas, de um determinado produto é bem modelada por uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo (1, 3).
    a) Determine a probabilidade de num dia a produção se situar entre 2 e 2.5 toneladas.
    b) Determine a probabilidade de ao fim de 60 dias de laboração se conseguir satisfazer uma encomenda de 125 toneladas do produto.

86. As vendas diárias de certo tipo de adubo efectuadas por uma cooperativa agrícola podem ser consideradas variáveis aleatórias independentes, com média 20 e desvio

padrão 4. O aprovisionamento é feito trimestralmente (90 dias). Determine o montante mínimo a encomendar no início de cada trimestre de modo a que a probabilidade de ruptura de *stock* não ultrapasse 0,025.

87. Seja (X,Y) um vector aleatório com distribuição normal bidimensional a verificar

$$\mu_X = 70,\ \sigma_X^2 = 100,\ \mu_Y = 80,\ \sigma_Y^2 = 169 \text{ e } \rho = 5/13.$$

Calcule:

a) $E(Y \mid X = 72)$ e $\mathrm{Var}(Y \mid X = 72)$.

b) $P(Y < 84 \mid X = 72)$.

c) $P(X + Y < 164)$

88. Considere a variável aleatória (X,Y) com distribuição normal bidimensional com média e variância dadas por: $\mu_X = 15$, $\mu_Y = 25$, $\sigma_X^2 = 4$ e $\sigma_Y^2 = 25$.

a) Sabendo que $P(25 < Y < 32 \mid X = 15) = 0.475$ e que X e Y têm correlação positiva, calcule ρ.

b) Se $\rho = 0$, calcule $P(X - Y > 0)$.

89. Seja X a variável aleatória que representa a altura em centímetros, e Y, o peso de um aluno em quilogramas. Admita que X e Y têm distribuição conjunta normal bidimensional com os seguintes parâmetros:

$$\mu_X = 185,\ \sigma_X^2 = 100,\ \mu_Y = 84,\ \sigma_Y^2 = 64 \text{ e } \rho = 3/5.$$

a) Determine a distribuição de Y condicionada por $X = 190$.

b) Calcule e interprete $P(86.4 < Y < 95.36 \mid X = 190)$.

90. Considere a variável aleatória (X,Y) com distribuição normal bidimensional de médias e desvios padrão dados por: $\mu_X = 12$, $\mu_Y = 20$, $\sigma_X = 6$ e $\sigma_Y = 7$. Sabe-se ainda que $\mathrm{Var}(X+Y) = 43$. Calcule:

a) $E(X \mid Y = 30)$ e $\mathrm{Var}(X \mid Y = 30)$.

b) $P(15 < Y < 18 \mid X = 18)$.

91. Considere a variável aleatória (X,Y) com distribuição normal bidimensional de médias e variâncias dadas por: $\mu_X = 12$, $\mu_Y = 20$, $\sigma_X = 6$ e $\sigma_Y = 7$. A covariância entre X e Y é igual a -21. Nestas condições calcule $P(15 < Y < 18 \mid X = 18)$.

92. Classifique as afirmações abaixo de verdadeiras ou falsas, justificando sucintamente:

a) Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ então $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)$ não depende nem de μ nem de σ.

b) Se $X_i \sim N(0, \sigma_i^2)$, $i = 1,2$, com $\sigma_1 < \sigma_2$, então $P(|X_1| > a) \geq P(|X_2| > a)$ para $a > 0$.

c) Seja $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Então, com n inteiro positivo, $E\left[\left(X - \mu\right)^{2n-1}\right] = 0$.

d) Seja $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Então $Z = X^2$ tem distribuição do qui-quadrado com um grau de liberdade.

e) Numa normal bidimensional, correlação nula significa independência.

SOLUÇÕES

1. a) 0.1348; b) 0.5367.
2. 0.3758.
3. a) 2; b) 0.5599, 0.1892.
4. a) 0.0988; b) 0.0755.
5. a) 0.1024; b) 5.
6. 0.1172.
7. 0.0515.
8. a) 0.0062; b) 0.0601.
9. a) 0.1216; b) 0.3585; c) 0.6083.
10. a) $X \sim \mathrm{BN}(2;0.5)$; b) 0.1875; c) 0.6875.
11. a) 0.9025; b) 0.9975; c) ≈ 0.
12. a) $X \sim H(52,13,4)$; b) 1, 0.7059; c) 0.00264; d) 0.3067.
13. a) 0.0683, sem reposição; 0.0702 com reposição; b) 8.
14. a) 0.1755; b) 0.9933; c) 0.4261.
15. a) 0.0183; b) 0.6512; c) 0.0516; d) 0.9118.
16. a) 0.0821; b) 0.1248.
17. a) 0.0952; b) 0.2958; c) 0.0487.
18. a) $\lambda = k$; c) se λ inteiro então existem dois maximizantes $k = \lambda - 1$ e $k = \lambda$, para outros valores de λ será o maior inteiro inferior a λ.
19. a) V; b) F; c) F; d) F.
20. a) 0.0498; b) 0.1528; c) 0.0124; d) 0.1366.
21. a) 0.0498; b) 0.0424; c) 0.8529.
22. a) 0.4405; b) 0.0067; c) 0.0062.
23. a) 0.0803; b) 0.1247; c) 0.2836.
24. a) 0.9161; b) 0.4457; c) 0.63.
25. a) 0.8795; b) 0.0315.
26. 0.2642.
27. a) 0.5488; b) 0.9925.
28. a) 0.0183; b) 0.2149.
29. a) 0.3679, 0.6065; b) 0.3039; c) 0.2715.
30. a) 78.76%; b) 0.3763; c) 0.0843.
31. 0.1172.
32. a) $X \sim U(0,5)$, $E(X) = 2.5$, $\mathrm{Var}(X) = 25/12$; c) não existe média.
33. 8.
34. a) $F(x) = 0$ ($x < 5$), $F(x) = (x-5)/7$ ($5 \leq x < 12$), $F(x) = 1$ ($x \geq 12$); b) 5/7; c) 0.8 d) 8.5, 2.0207.
37. a) V; b) F; c) V; d) V; e) V.
38. a) 0.4798; b) 0.7419; c) 0.9798; d) 1.96; e) 1.645.
39. a) 0.3849; b) 0.5404; c) 0.0228; d) 0.0455; e) – 0.4078.
40. $N(2,2)$.
41. a) 93.92%; b) 0.3188; c) 600, 320; d) 109.744.

42. a) 0.1336; b) 0.0062.
43. a) 0.5102 b) 0.1421 c) 2, (1.6559, 2.3441) d) 0.9118.
44. a) 9.378, 24.96%, 45.04%; b) 0.5798.
45. a) 43.7534; b) 0.4364.
46. 78.87%.
47. a) 0.0062; b) 0.9996.
48. a) 0.7501; b) 0.6827; c) 0.0139; d) 0.5763.
49. a) 0.3834; b) 0.2231; c) 0.2231.
50. a) 0.1353; b) 0.1353; d) 0.1170.
51. a) 0.3935; b) 0.3679.
52. 0.4512.
53. a) 0.4493; b) 0.2751; c) probabilidade de cumprir: 0.4054.
54. a) 0.7769; b) 0.1353, 0.1848.
55. a) 5.2711; b) 0.0772.
56. a) 0.6065; b) 0.7135; c) 0.2468.
58. a) 0.8; b) 11.69, 38.0756; c) 23, 46; d) 35.1725, 13.0905.
59. -1.5, 3.5.
60. a) 0.4405; b) 4.5768.
61. a) 3.7417; b) 9.0371.
62. a) 5.625, 12.6563 b) 0.0492.
63. a) 0.4159; b) 0.0499; c) 0.1697.
64. a) Sim; b) 2.7726, (1.1507, 5.5452); c) 80, 320; d) 0.7295; e) 3.0590×10^{-7}.
66. a) Be(2, 3), 0.4, 0.04; b) 0.1808, 0.2630; c) Be(3, 2); d) 4.
67. a) 0.00046, 0.1876; b) 2/3, 0.1782; c) 0.5667.
68. a) 0.4938; b) 0.0305.
69. 0.00234.
70. A probabilidade da verba de 8000 euros ser suficiente é 0.7836.
71. a) 0.7475; b) 3837.24.
72. 0.0175.
73. a) 0.9618 (exacta: 0.9710); b) exacta: 0.0051, aproximada: 0.0036.
74. a) 0.2417; b) 0.2197; c) 0.2244.
75. 0.0119 (exacta), 0.0127 (Poisson), 0.0082 (normal).
76. b) 0.5, 3.25; 0.1, 3.01 ; 0.01, 3.001.
77. a) 0.0276 (exacta: 0.0323); b) 0.5313 (incluindo extremos) ou 0.4879 (excluindo) ; c) 1 (exacta: 0.9997).
78. a) 70; b) 0.0069 (exacta: 0.0097).
79. a) 0.9839 (exacta: 0.9862); b) 0.8932 (exacta: 0.8934).
80. a) 0.0527; b) 0.1100 (exacta: 0.1118); c) 0.0339 (normal), 0.0445 (Poisson), (exacta: 0.0431).
81. 0.7708 (exacta: 0.7739).
82. a) 15.87%; b) 61.745; c) 0.0373.
83. a) 0.1587, 0.6815; b) 0.57696; c) não é razoável.
84. 0.0562.

85. a) 0.25; b) 0.1318.
86. 1874.3754.
87. a) 81, 144; b) 0.5987; c) 0.7669.
88. a) 0.7; b) 0.0317.
89. a) $N(86.4, 40.96)$; b) 0.4192.
90. a) 7.7143, 27; b) 0.1954.
91. 0.1954
92. a) V; b) F; c) V; d) F; e) V.